Gruppentheorie

Damian Osajda
damian.osajda@univie.ac.at
http://www.mat.univie.ac.at/∼dosaj/
Dienstag, 13:00–14:00
Seminarraum 11 Oskar-Morgenstern-Platz 1 2.Stock

Blatt 1

(1) Welche der folgenden Aktionen von Gruppen G auf Mengen X beschreiben Gruppenoperationen? Begründe die Antworten.
  (a) Für $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$ sei $g \cdot x$ definiert als gx, das Produkt von reellen Zahlen, für $g \in G$ und $x \in X$.
  (b) Für $G = GL_2(\mathbb{R})$, $X = M_2(\mathbb{R})$ sei $g \cdot x$ definiert als $(gx + xg)/2$, für $g \in G$ und $x \in X$. Dabei ist gx und xg das Matrixprodukt.
  (c) Für $G = GL_2(\mathbb{R})$, $X = M_2(\mathbb{R})$ sei $g \cdot x$ definiert als gx, für $g \in G$ und $x \in X$.
  (d) Für $G = GL_2(\mathbb{R})$, $X = M_2(\mathbb{R})$ sei $g \cdot x$ definiert als xg, für $g \in G$ und $x \in X$.
  (e) Für $G = PSL_2(\mathbb{R})$, $X = \mathbb{C}$ sei $g \cdot z := \frac{az+b}{cz+d}$, für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ und $z \in X$.

(2) Sei D_∞ die sogenannte unendliche Diedergruppe. Sie ist definiert als die Untergruppe der Gruppe aller Bijektionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die durch Translationen $t(x) = x+1$ und Spiegelungen $s(x) = -x$ erzeugt wird. Beschreibe alle Elemente von D_∞. Die Gruppe D_∞ operiert in natürlicher Weise auf $\mathbb{R}$. Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren von folgenden Elementen: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

(3) Die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^*$ operiert auf $X = \mathbb{R}^2$ durch die Vorschrift $t \cdot (x, y) = (tx, t^{-1}y)$, $t \in \mathbb{R}^*$, $x, y \in \mathbb{R}^2$. Bestimme die Bahnen, Stabilisatoren und Fixpunkte dieser Operation.

(4) Sei eine endliche Gruppe G wirkt auf eine Menge X. Zeige das Lemma von Burnside:
$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

(5) Der *Cayleygraph* $\mathrm{Cay}(G, S)$ für einen Erzeugendensystem S von der Gruppe G, ist ein graph mit Elementen von G als Knoten und die Kanten $\{g, gs\}$, wo $s \in S$.

Zeige den Satz von Sabidussi: Ein zusammenhängendes Graph Γ ist ein Cayleygraph einer Gruppe G genau dann, wenn er eine auf den Knoten freie und transitive Wirkung von G durch Automorphismen des Graphen zulässt.